数理解析研究所講究録
615巻 1987年 83-101

可解リー群の単項表現について

九大・理　　藤原英徳

ここでは主として exponential group の単項表現に関し、琉球大学理学部の山上　滋氏と筆者が最近興味を抱いている問題を取り上げ、例を挙げながら解説してみたい。

§1.　Preliminaries

リー群 G（常に σ - compact 仮定）の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\pi$ (separable 仮定）への unitary 表現 π に対し、C^∞- vector の空間を $\mathcal{H}^\infty$ ，その antidual space を $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ で表わし $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ の要素を π の generalized vector と呼ぶことにしよう。G の作用は、duality により $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ に拡張されるが、G の閉部分群 H とその指標 $c : H \to \mathbb{C}^*$ に対し、

$$(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,c} = \{ a \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty};\quad \pi(h)a = c(h)a \quad \text{for } {}^\forall h \in H \}$$

とおく。又 $< a, b >$ ($a \in \mathcal{H}_\pi^{\pm\infty}$, $b \in \mathcal{H}_\pi^{\mp\infty}$) で a の b における値を表わす。

今 G 及び H の module をそれぞれ Δ_G, Δ_H で表わし、H 上

$$(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{1,1} = \mathcal{H}_\pi^{-\infty}$$

/

$G/H \xrightarrow[F]{} \mathbb{C}$

$\Delta_{G/H} = \Delta_H / \Delta_G$ とおく。G 上関数等式 $F(gh) = \Delta_{G/H}(h)F(g)$ $(g \in G,\ h \in H)$ を みたし、mod H で compact support をもつ $\mathbb{C}$ - valued continuous function F のなす空間上には G-invariant positive linear form $\nu_{G/H}$ が scalar 倍を除いて unique に存在する。記法

$$\nu_{G/H}(F) = \oint_{G/H} F(g)\, d\nu_{G/H}(\dot{g})$$

を用いよう。 $\begin{matrix} L_\chi \\ \downarrow \\ G/H \end{matrix} \Rightarrow \mathcal{H} = \Gamma(G/H, L_\chi)$

H の unitary character χ から誘導された G の unitary 表現、いわゆる単項表現 $\tau = \mathrm{ind}_H^G\, \chi$ に関し、特別な generalized vector

$a_\tau \in \mathcal{H}_\tau^{-\infty}$: $a_\tau : \mathcal{H}_\tau^\infty \ni \Phi \to \overline{\Phi(e)} \in \mathbb{C}$ (e: G の単位元)

$a_\tau = \overline{\delta}$

を考えると、$\mathcal{H}_\tau^\infty \subset C^\infty(G)$ より a_τ は意味を持ち

$$a_\tau \in (\mathcal{H}_\tau^{-\infty})^{H,\, \chi\Delta_{G/H}^{1/2}}$$

$\pi(h)\, a_\tau = \chi(h) \cdot \Delta_{G/H}(h)\, a_\tau$

$\Updownarrow$

$\langle a_\tau, \pi(h)\Phi \rangle = \chi(h)\, \Delta_{G/H}(h) \langle a_\tau, \Phi \rangle$

G を I 型としよう。τ の canonical central decomposition に応じて generalized vector a_τ も分解される。これが τ に対する Penney の Plancherel theorem である。

さて $G = \exp \mathfrak{g}$ をリー環 $\mathfrak{g}$ をもつ exponential group 、即ち exponential map $\exp: \mathfrak{g} \to G$ が diffeomorphism なるもの、$\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ の dual vector space とする。$f \in \mathfrak{g}^*$ に対し $B^f(X,Y) = f([X,Y])$ なる $\mathfrak{g}$ 上の antisymmetric bilinear form を考え、その radical を $\mathfrak{g}(f) = \{X \in \mathfrak{g};\ B^f(X,Y) = 0 \text{ for } \forall\, Y \in \mathfrak{g}\}$ で表す。G は $\mathfrak{g}^*$ に coadjoint action $(X \cdot f)(Y) = 0$ で作用するが、$\mathfrak{g}(f)$ はこの作用に関する f の stabilizer G(f) のリー環に他ならない。$S(f, \mathfrak{g}) = \{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g};$ 部分リー環、$B^f \mid \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \equiv 0\}$ とおく。

$\mathfrak{g}(f) = \{X \in \mathfrak{g} \mid X \cdot f = 0\}$

我々の興味の対象は $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ から出発し、対応する analytic

$S(f, \mathfrak{g}) = \{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} \mid f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0\}$

$$\begin{array}{ccccc} G \supset H & \xrightarrow{\chi_f} & S^1 & \Rightarrow & \begin{array}{c} L_{\chi_f} \\ \downarrow \\ G/H \end{array} \\ \exp \uparrow & & \uparrow e & & \\ \mathfrak{g} \supset \mathfrak{h} & \xrightarrow{\sqrt{-1} f} & \sqrt{-1}\mathbb{R} & & \end{array}$$

subgroup $H = \exp \mathfrak{h}$ の unitary character χ_f, $\chi_f(\exp X) = e^{\sqrt{-1} f(X)}$ $(X \in \mathfrak{h})$ 、を用いて構成された誘導表現 $\tau(f, \mathfrak{h}) = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$ である。この時 exponential group $G = \exp \mathfrak{g}$ の任意の既約 unitary 表現は単項表現に、i.e. 適当な $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ を用いて構成された上記 $\tau(f, \mathfrak{h})$ に同値である事が知られている。

そこで $\tau(f, \mathfrak{h})$ がいつ既約になるかを調べると、その判定条件としていわゆる Pukanszky condition を得る：

$$\tau(f, \mathfrak{h}) \text{ が既約} \iff \mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g}) \equiv \{\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g});\ H.f = f + \mathfrak{h}^{\perp}\}$$

ここに $M(f, \mathfrak{g}) = \{\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g});\ 2 \dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f)\}$、$\mathfrak{h}^{\perp} = \{l \in \mathfrak{g}^*;\ l \mid \mathfrak{h} = 0\}$。一般に $f \in \mathfrak{g}^*$ に対し、

$$\begin{array}{c} S(f,\mathfrak{g}) \\ \cup \\ M(f,\mathfrak{g}) \\ \cup \\ I(f,\mathfrak{g}) \end{array}$$

$$\phi \neq I(f, \mathfrak{g}) \subsetneq M(f, \mathfrak{g}) \subsetneq S(f, \mathfrak{g})。$$

次に $\mathfrak{h}_1$、$\mathfrak{h}_2 \in I(f, \mathfrak{g})$ とすると $\tau(f, \mathfrak{h}_1) \simeq \tau(f, \mathfrak{h}_2)$ (unitary equivalent) が示され、$\mathfrak{g}^* \ni f \mapsto \theta(f) = \tau(f, \mathfrak{h}) \in G^\wedge$ なる surjection が $\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$ を媒介にして定義される。但し $G^\wedge$ は G の unitary dual, i.e. G の既約 unitary 表現の同値類の集合を表し、その要素はしばしば代表元と同一視される。

更に $f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$ とすると

$$\theta(f_1) = \theta(f_2) \iff G.f_1 = G.f_2$$

が示され、θ は quotient に移って G の coadjoint action による orbit space $\mathfrak{g}^*/G$ から $G^\wedge$ 上への bijection $\bar{\theta}$ を与える。$\pi \in G^\wedge$ に対応する orbit $\bar{\theta}^{-1}(\pi)$ を $\Omega(\pi)$ とも書こう。

ここで分解定理を２つ与えておく。$G = \exp \mathfrak{g}$: exponential group, $f \in \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g})$ とし $H = \exp \mathfrak{h}$ の unitary character χ_f から $\tau(f, \mathfrak{h})$ を構成する。affine space $f + \mathfrak{h}^{\perp}$ とその開集合で交わ

る G の coadjoint orbit の集合を $U(f,\mathfrak{h})$ で表し、$\Omega\in U(f,\mathfrak{h})$ に対し $(f+\mathfrak{h}^{\perp})\cap\Omega$ に含まれる H-orbit の数を $m(f,\mathfrak{h},\Omega)$ とおく。

定理1 (M.Vergne[10]). $U(f,\mathfrak{h})$ は有限集合で、$\forall\Omega\in U(f,\mathfrak{h})$ に対し $m(f,\mathfrak{h},\Omega)<+\infty$ となり

$$\tau(f,\mathfrak{h}) \simeq \sum_{\Omega\in U(f,\mathfrak{h})} m(f,\mathfrak{h},\Omega)\,\bar{\theta}(\Omega).$$

次により一般の $\mathfrak{h}\in S(f,\mathfrak{g})$ から構成された単項表現 $\tau(f,\mathfrak{h})$ の canonical central decomposition

$$\tau(f,\mathfrak{h}) \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\,\pi\, d\nu(\pi)$$

を考えよう。

定理2 (L.Corwin, F.P.Greenleaf and G.Grelaud[3]). $\mathfrak{g}$ が巾零の時、測度 ν の class は affine space $f+\mathfrak{h}^{\perp}$ 上の Lebesgue measure class の Kirillov map θ による image であり、他方 multiplicity $m(\pi)$ は $(f+\mathfrak{h}^{\perp})\cap\theta^{-1}(\pi)$ に含まれる H-orbit の数である。

§2. Questions

ここに幾つかの問題を挙げてみよう。断わらない限り $G=\exp\mathfrak{g}$ はリー環 $\mathfrak{g}$ を持つ exponential group とする。

問1 (cf.[4]). $f\in\mathfrak{g}^*$、$\mathfrak{h}_j\in I(f,\mathfrak{g})$、$H_j=\exp\mathfrak{h}_j\,(j=1,2)$ とおく。

(イ) 積集合 H_1H_2 は G の閉集合であろうか?

(ロ) $\tau_1=\tau(f,\mathfrak{h}_1)$ と $\tau_2=\tau(f,\mathfrak{h}_2)$ の間の intertwining operator, i.e. $\tau_2(g)T_{21}=T_{21}\tau_1(g)$ for $\forall g\in G$ なる unitary isomorphism $T_{21}:\mathcal{H}_{\tau_1}\to\mathcal{H}_{\tau_2}$、の具体的な形を求めよ。$\mathcal{H}_{\tau_1}$

の適当な dense subspace 上

$$(T_{21}\,\varphi)(g) = \int_{H_2/H_1\cap H_2} \varphi(gh)\,\chi_f(h)\,\Delta_{G,H}(h)^{-1/2}\; d\nu_{H_2/H_1\cap H_2}(\dot{h})$$

で与えられるか?

問2 (cf.[1]、[6]). $\pi\in\hat{G}$ を $\pi = \tau(l,\mathfrak{b})$, $l\in\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{b}\in I(l,\mathfrak{g})$ と実現する。$\mathfrak{g}$ における $\mathfrak{b}$ の coexponential basis をとると generalized vector $a\in\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ はこれらの座標に関する distribution と思える。今 $f\in\mathfrak{g}^*$ 、$\mathfrak{h}\in S(f,\mathfrak{g})$ とし $H = \exp\mathfrak{h}$ の unitary character χ_f を以前通り $\chi_f(\exp X) = e^{\sqrt{-1}f(X)}$ $(X\in\mathfrak{h})$で与え、又 $c: H\to\mathbb{R}^*$ を H の real character とする。この時 $a\in(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f c}$ に対し a の台 supp a は $\overline{\{g\in G;\ g.(l+\mathfrak{b}^\perp)\cap(f+\mathfrak{h}^\perp) = \phi\}}$ に含まれる? 特に $\Omega(\pi)\cap(f+\mathfrak{h}^\perp) = \phi$ なら $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f c} = \{0\}$?

$f\in\mathfrak{g}^*$、$\mathfrak{h}\in S(f,\mathfrak{g})$ とし $\tau(f,\mathfrak{h})$ の canonical cetral decomposition を

$$\tau(f,\mathfrak{h}) \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\,\pi\, d\nu(\pi) \qquad (*)$$

とする。

問3 (cf.[1]、[3]). ν の measure class と multiplicity function $m(\pi)$ を求めよ。特に exponential group に対しても定理2は成立するであろうか?

問4 (cf.[1]、[6]、[7]、[9]). $\tau(f,\mathfrak{h})$ に対し Frobenius reciprocity が成立するか? 即ち (*) において

$$m(\pi) = \dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f\Delta_{G,H}^{1/2}}$$

にとれるであろうか？

問５（cf.[6],[9]）．$\tau=\tau(f,\mathfrak{h})$ に対する Plancherel formula を書け。即ち τ の分解（※）に即して generalized vector $a_\tau \in (\mathcal{H}_\tau^{-\infty})^{H,\chi_f\Delta_{G/H}^{1/2}}$ の分解を具体的に与えよ。

問６（cf.[5]）.G をリー環 $\mathfrak{g}$ をもつ連結、単連結可解リー群、$f\in\mathfrak{g}^*$、$\mathfrak{h}\in M(f,\mathfrak{g})$ とし、$\mathfrak{h}$ は $G(f)$-invariant と仮定する。$\mathfrak{h}$ に対する G の analitic subgroup を H° とし、$H=G(f)H^\circ$ は G の閉部分群であるとする。他方 $G(f)$ の unitary character η_f で $d\eta_f=\sqrt{-1}\,f|\mathfrak{g}(f)$ なるものが存在し、η_f は $d\chi_f=\sqrt{-1}\,f|\mathfrak{h}$ なる H の unitary character χ_f に unique に拡張されると仮定しよう。この時、単項表現 $\mathrm{ind}_H^G\,\chi_f$ を分解せよ。

§３.Examples and one theorem

G 上 compact support をもつ $\mathbb{C}$-valued continuous (resp. C^∞) function の空間を $\mathcal{K}(G)$ (resp. $\mathcal{D}(G)$) で表す。

例１．$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_2=\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_2$：ａｘ＋ｂ algebra とする、i.e. $[e_1,e_2]=e_2$．$f=e_2^*\in\mathfrak{g}^*$、$\mathfrak{h}=\mathbb{R}e_1\in M(f,\mathfrak{g})$ にとり $G=\exp\mathfrak{g}$ の２つの open coadjoint orbit $\pm G.e_2^*$ に対応する $\pi_\pm\in\hat{G}$ を $\hat{\phi}(t)=\phi(\exp te_1)$ により $L^2(\mathbb{R})$ 上に実現する。又 $H=\exp\mathfrak{h}$ 上の左 Haar 測度 dh を用いて $F\in\mathcal{D}(G)$ に対し

$$\tilde{F}(g)=\int_H F(gh)\chi_f(h)\Delta_{G/H}^{-1/2}(h)dh\in\mathcal{H}_\tau^\infty$$

とおく。但し $g\in G$、$\tau=\mathrm{ind}_H^G\chi_f=\mathrm{ind}_H^G 1\!\!1_H$（$1\!\!1_H$：H の trivial character）。$h=\exp te_1$ に対し $dh=dt$ にとると

$$\widetilde{F}(e) = \int_{\mathbb{R}} F(\exp te_1)\, e^{-t/2}\, dt$$

他方 $\psi \in \mathcal{H}_{\pi_\pm}^{\infty}$ に対し,

$$a_\pm(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(\exp\ te_1)}\, e^{-t/2}\, dt$$

とおくと、$\psi \in \mathcal{H}_{\pi_\pm}^{\infty} \Rightarrow e^{-mt}\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ for $^\forall$ m:non-negative integer 故、

$$|a_\pm(\psi)| = |\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t/2}\, \overline{\hat{\psi}(t)}dt|$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{0} |e^{-t/2}\ \hat{\psi}(t)|dt + \int_{0}^{\infty} |e^{-t/2}\ \hat{\psi}(t)|dt$$

$$\leqq (\int_0^{\infty} e^{-t}dt)^{1/2} (\int_0^{\infty} |\hat{\psi}(t)|^2 dt)^{1/2}$$

$$+ (\int_{-\infty}^{0} e^{t}dt)^{1/2} (\int_{-\infty}^{0} |e^{-t}\hat{\psi}(t)|^2 dt)^{1/2}$$

$$= (\int_0^{\infty} |\hat{\psi}(t)|^2 dt)^{1/2} + (\int_{-\infty}^{0} |e^{-t}\hat{\psi}(t)|^2 dt)^{1/2}$$

$$\leqq \|\hat{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|e^{-t}\hat{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$= \|\psi\|_{\mathcal{H}_{\pi_\pm}} + \|e_2\psi\|_{\mathcal{H}_{\pi_\pm}}$$

従って $a_\pm$ は連続、i.e. $a_\pm \in (\mathcal{H}_{\pi_\pm}^{-\infty})^{H,\chi_f \Delta_{G/H}^{1/2}}$ 。

さて G 上の左 Haar 測度を $g=\exp se_1 \exp ue_2$ に対し $dg=dsdu$ とし、

$$\pi_\pm(F) = \int_G F(g)\pi_\pm(g)dg、\ F \in \mathcal{D}(G)$$

とおく。この時 $F \in \mathcal{D}(G)$、$\psi \in \mathcal{H}_{\pi_\pm}^{\infty}$ として

$$<\pi_+(F)a_+,\psi> = \int \overline{F(g)}\overline{(\pi_+(g^{-1})\psi)(\exp te_1)}\,e^{-t/2}dgdt$$

$$= \int F(g)\overline{\psi(\exp se_1 \exp ue_2 \exp te_1)}\,e^{-t/2}dtdsdu$$

$$= \int F(\exp se_1 \exp ue_2)\overline{\psi(\exp(s+t)e_1 \exp ue^{-t}e_2)}\,e^{-t/2}dtdsdu$$

$$= \int F(\exp se_1 \exp ue_2)\,e^{\sqrt{-1}ue^{-t}}\,\overline{\psi(\exp(s+t)e_1)}\,e^{-t/2}dtdsdu$$

$$\therefore (\pi_+(F)a_+)(\exp te_1) = \int F(\exp se_1 \exp ue_2)\,e^{\sqrt{-1}ue^{-(t-s)}}\,e^{-(t-s)/2}\,dsdu$$

$$<\pi_+(F)a_+,a_+> = \int F(\exp se_1 \exp ue_2)\,e^{\sqrt{-1}ue^{s-t}}\,e^{-t+s/2}\,dsdudt$$

$$= \int_0^\infty dv \int_{\mathbb{R}^2} F(\exp se_1 \exp ue_2)\,e^{\sqrt{-1}uv}\,e^{-s/2}\,dsdu$$

同様にして

$$(\pi_-(F)a_-)(\exp te_1) = \int F(\exp se_1 \exp ue_2)\,e^{-\sqrt{-1}ue^{-(t-s)}}\,e^{-(t-s)/2}\,dsdu$$

$$<\pi_-(F)a_-,\ a_-> = \int_{-\infty}^0 dv \int_{\mathbb{R}^2} F(\exp se_1 \exp ue_2)\,e^{\sqrt{-1}uv}\,e^{-s/2}\,dsdu$$

これより $(2\pi)^{-1/2}a_\pm$ を改めて $a_\pm$ とおけば

$$<\pi_+(F)a_+,a_+> + <\pi_-(F)a_-,a_->$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{\mathbb{R}^2} F(\exp se_1 \exp ue_2)\,e^{-s/2}\,e^{\sqrt{-1}uv}\,dsdu$$

$$= \int_{\mathbb{R}} F(\exp se_1)\,e^{-s/2}\,ds = \widetilde{F}(e) = <\tau(F)a_\tau, a_\tau>$$

但し a $\in (\mathcal{H}_\tau^{-\infty})^{H,\chi_f \Delta_{G,H}^{1/2}}$; $a_\tau : \mathcal{H}_\tau^\infty \ni \psi \to \overline{\psi(e)} \in \mathbb{C}$.
これが単項表現τに対する我々の Plancherel formula である。

例2 (cf.[1]) . $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$を平面の運動群の universal cover とする。G のリー環は $\mathfrak{g} = \mathbb{R}T + \mathbb{R}X + \mathbb{R}Y : [T,X]=Y, [T,Y]=-X$. この基底に関する第2種標準座標を用いて non-exponential group G を $\mathbb{R}^3$と同一視すると、その積演算は

$$(\theta,a,b)(\theta,a,b)=(\theta+\theta,a+a\cos\theta-b\sin\theta,b+a\sin\theta+b\cos\theta).$$

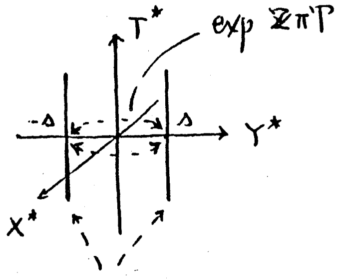
今$l=-sY \in \mathfrak{g}$ で polarization $\mathfrak{b} = \mathbb{R}X + \mathbb{R}Y \in I(l,\mathfrak{g})$をとり $B^\circ = \exp\mathfrak{b}$ 、$B=ZB^\circ$ とおく。ここに $Z= G(l) = \exp 2\pi\mathbb{Z}T$: G の center。$G(l)$ の unitary character χ_α 、$\chi_\alpha(\exp 2m\pi T)=e^{\sqrt{-1}\,2\pi m\alpha}$ 、を B の unitary character $\chi_\alpha(\exp 2m\pi Tb)=e^{\sqrt{-1}\,2\pi m\alpha}\ \chi_l(b)$ ($m \in \mathbb{Z}, b \in B^\circ$) に拡張し、$G^\wedge$の元 $\pi_{s,\alpha}= \mathrm{ind}_B^G \chi_\alpha$ を right translation で実現すると

$$(\pi_{s,\alpha}(g)(\phi))(t)=\phi((t+\theta,a\cos t-b\sin t,a\sin t+b\cos t))$$

$$=e^{-\sqrt{-1}\,s(a\sin t+b\cos t)}e^{\sqrt{-1}\,\alpha[\theta+t]}\phi(\widehat{t+\theta})$$

但し$\phi \in L^2([0,2\pi))$、$t \in [0,2\pi)$、$g=(\theta,a,b) \in G$ かつ $t+\theta = [t+\theta] + \widehat{t+\theta}$ with $[t+\theta] \in 2\pi\mathbb{Z}$, $\widehat{t+\theta} \in [0,2\pi)$。

又この表現は $l = -sX^* \in \mathfrak{g}^*$ における polarization $\mathfrak{b}$ から同様にして構成され



$$(\pi_{s,\alpha}(g)(\phi))(t)=$$

$$e^{-\sqrt{-1}\,s(a\cos t-b\sin t)}e^{\sqrt{-1}\,\alpha[\theta+t]}\phi(\widehat{t+\theta}).$$

$\mathfrak{b}^\perp \cap G.l = -sY^* \sqcup sY^*$

各々の line は H°-orbit with $H^\circ = \exp\mathfrak{b}$

さて $\mathfrak{h}=\mathbb{R}X$ としてまず $\tau=\mathrm{ind}_{H^\circ}^{G}\mathbf{1}_{H^\circ}$、$H^\circ=\exp\mathfrak{h}$ を考えると Benoistにより

$$\tau\simeq 2\int_{\mathbb{R}_+\times[0,1)}^{\oplus}\pi_{s,\alpha}\,dsd\alpha.$$

更にこの時 $\dim(\mathcal{H}_{\pi_{s,\alpha}}^{-\infty})^{H^\circ}=2$、但し一般に $(\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{K,\ell_K}$ を簡単の為 $(\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{K}$ と書く、で $\pi_{s,\alpha}$ の第2の実現を用いる時

$$(\mathcal{H}_{\pi_{s,\alpha}}^{-\infty})^{H^\circ}=\mathbb{C}\delta_{-\frac{\pi}{2}}\oplus\mathbb{C}\delta_{\frac{\pi}{2}}\quad(\delta:\text{Dirac measure の conjugate})。$$

又第1の実現を用いる時

$$(\mathcal{H}_{\pi_{s,\alpha}}^{-\infty})^{H^\circ}=\mathbb{C}\delta_{0}\oplus\mathbb{C}\delta_{\pi}$$

となる。他方 $\mathfrak{h}^{\perp}\cap G.l$ は2つの連結成分から成りそれぞれは H° - orbit でその次元は orbit $G.l$ の次元の半分。

今 $S=\{g\in G;g^{-1}.(l+\mathfrak{f}^{\perp})\cap\mathfrak{h}^{\perp}\neq\phi\}$ を求めてみよう。$g=(\theta,a,b)\in G$ として

$$g^{-1}.(\alpha T^*+\beta Y^*)(X)=\beta\sin\theta、g^{-1}.(\alpha T^*+\beta Y^*)(Y)=\beta\cos\theta$$
$$(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

より、$l=-sX^*$ の時 $S=((\mathbb{Z}+1/2)\pi,\mathbb{R},\mathbb{R})$ 又 $l=-sY^*$ の時 $S=(\mathbb{Z}\pi,\mathbb{R},\mathbb{R})$ となり丁度 $(\mathcal{H}_{\pi_{s,\alpha}}^{-\infty})^{H^\circ}$ の元の support と一致する。

さて次に部分群 $H=ZH^\circ$ の unitary character $\rho_\gamma(\exp m\pi Th^\circ)=e^{\sqrt{-1}2\pi m\gamma}$ $(m\in\mathbb{Z},\ h^\circ\in H^\circ,\ \gamma\in[0,1))$ からの誘導表現 $\tau=\mathrm{ind}_H^G\rho_\gamma$ をやはりright translation で実現すると、$\phi\in L^2([0,\pi)\times\mathbb{R})$、$g=(\theta,a,b)\in G$ として

$$(\tau(g)\phi)(t,\eta)=e^{2\sqrt{-1}[[t+\theta]]\gamma\pi}\phi(\widehat{t+\theta},(-1)^{[[t+\theta]]}(\eta+a\sin t+b\cos t))$$

但し $t+\theta=[[t+\theta]]\pi+\widehat{t+\theta}$ with $[[t+\theta]]\in\mathbb{Z}$、$\widehat{t+\theta}\in[0,\pi)$.
Fourier変換

$$\Phi(t,\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\eta y}\phi(t,y)dy$$

に移って得られる表現をやはり τ とかくと、$(t,\eta)\in[0,\pi)\times\mathbb{R}$ として

$$(\tau(g)\Phi)(t,\eta)=e^{2\sqrt{-1}[[t+\theta]]\gamma\pi}\, e^{-\sqrt{-1}\eta(a\ \sin t+b\ \cos t)}\Phi(\widehat{t+\theta},\ (-1)^{[[t+\theta]]}\eta).$$

最後に map $L^2([0,\pi)\times\mathbb{R})\ni\Phi\leftrightarrow\widetilde{\Phi}\in L^2([0,2\pi)\times\mathbb{R}_+)$;

$$\widetilde{\Phi}(t,\eta)=\begin{cases}\Phi(t,\eta),t\in[0,\pi)\\ e^{2\sqrt{-1}\gamma\pi}\ \Phi(t-\pi,-\eta),t\in[\pi,2\pi)\end{cases}$$

により $L^2([0,2\pi)\times\mathbb{R}_+)$ 上に表現 τ を実現すると

$$(\tau(g)\widetilde{\Phi})(t,\eta)=e^{2\sqrt{-1}[t+\theta]\gamma}e^{-\sqrt{-1}\eta(a\ \sin t+b\ \cos t)}\widetilde{\Phi}(\widehat{t+\theta},\eta).$$

以上により G の $L^2([0,2\pi))$ への表現 $\tau_s(s>0)$;$F\in L^2([0,2\pi)$) に対し、$g=(\theta,a,b)\in G$ として

$$(\tau_s(g)F)(t)=e^{2\sqrt{-1}[t+\theta]\gamma}\ e^{-\sqrt{-1}s(a\ \sin t+b\ \cos t)}F(\widehat{t+\theta})$$

を導入すると

$$\tau\simeq\int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus}\tau_s ds$$

而るに τ_s は以前の記号で既約表現 $\pi_{s,2\gamma}$ (mod $\mathbb{Z}$)に他ならない。即ち Benoist の結果が保証するように τ は multiplicity free である。
これは上図でみて $\mathfrak{h}^{\perp}\cap G.1$ に含まれる2個の連結成分、各連結成分は

H° -orbit が $\exp\pi T\in H$ で結ばれる事に起因すると思われる。即ちこの場合、$\mathfrak{h}^{\perp}\cap G.1$に含まれる連結成分は依然として２個しかもそれぞれが丁度 G-orbit G.1 の次元の半分の次元をもつ smooth manifold であるが、$\mathfrak{h}^{\perp}\cap G.1$ は唯一つの H-orbit となっている。

最後に$\pi_{s,\alpha}$ の第２の実現において

$$(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_{s,\alpha}})^{H^{\circ}}\ni a=\xi\delta_{-\frac{\pi}{2}}+\eta\,\delta_{\frac{\pi}{2}}$$

が $(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_{s,\alpha}})^{H,\rho_\gamma}$に属する為の条件は

$$\langle\exp\pi T.a,\phi\rangle=\langle e^{2\pi\sqrt{-1}\gamma}a,\phi\rangle\quad\text{for}\quad\phi\in\mathcal{H}^{\infty}_{\pi_{s,\alpha}}\ .$$

左辺$=\langle a,\phi(t-\pi)\rangle=\xi\,\overline{\phi(-\frac{3}{2}\pi)}+\eta\,\overline{\phi(-\frac{\pi}{2})}=\xi e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}\overline{\phi(\frac{\pi}{2})}+\eta\,\overline{\phi(-\frac{\pi}{2})}.$

$$e^{2\pi\sqrt{-1}\gamma}\ \xi=\eta,\ e^{2\pi\sqrt{-1}\gamma}\ \eta=\xi e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}\ ,\text{i.e.}\quad e^{4\pi\sqrt{-1}\gamma}\xi=e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}\ \xi.$$

こうして

$$(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_{s,\alpha}})^{H,\rho_\gamma}=\begin{cases}\mathbb{C}(\delta_0+e^{2\pi\sqrt{-1}\gamma}\delta_{\pi}) & \text{if}\quad \alpha=2\gamma,\\ 0 & \text{if}\quad\alpha\neq 2\gamma.\end{cases}$$

同様にして第１の実現でやると

$$(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_{s,\alpha}})^{H,\rho_\gamma}=\begin{cases}\mathbb{C}\ (\delta_0+e^{2\pi\sqrt{-1}\gamma}\delta_{\pi}) & \text{if}\quad \alpha=2\gamma,\\ 0 & \text{if}\quad\alpha\neq 2\gamma.\end{cases}$$

又これらの元の support はやはり以前あたえた集合Sに一致する。

例３．$\mathfrak{g}=\mathbb{R}T+\mathbb{R}P+\mathbb{R}Q+\mathbb{R}E$; $[P,Q]=E$, $[T,E]=E$, $[T,P]=\frac{1}{2}P$、$[T,Q]=\frac{1}{2}Q$ (rank１の normal j-algebra) とし$G=\exp\mathfrak{g}$を考えよう。$f=E^*\in\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h}=\mathbb{R}T+\mathbb{R}Q\in M(f;\mathfrak{g})$ にとりχ_f,H etc は以前通りの意味でもちいる。G は discrete series の表現 $\pi_{\pm}\in G^{\wedge}\to\pm G.E^*\in\mathfrak{g}/G$ を持ち、定理１より

$\tau=\mathrm{ind}_H^G\chi_f\simeq\pi_++\pi_-$。

まず $\mathfrak{h}=\mathbb{R}Q+\mathbb{R}E\in I(\pm E^*,\mathfrak{g})$, $a\in(\mathcal{H}_{\pi_\pm}^{-\infty})^{H,\chi_f\Delta_{G/H}^{1/2}}$ として、$\psi\in\mathcal{H}_{\pi_\pm}^{\infty}$ に対し $\Psi(s,t)=\psi(\exp sT\exp tP)$ $(s,t\in\mathbb{R})$ とおく。$h=\exp xT\in H$ として $\langle\pi_\pm(h)a,\Psi\rangle=\langle a,\Psi(s+x,t)\rangle$、$h=\exp xQ\in H$ として $\langle\pi_\pm(h)a,\Psi\rangle=\langle a,\psi(\exp xQ\exp sT\exp tP)\rangle=\langle a,\psi(\exp sT\exp tP\exp(xe^{-\frac{s}{2}}Q-txe^{-\frac{s}{2}}E)\rangle=\langle a,e^{\pm\sqrt{-1}txe^{-\frac{s}{2}}}\Psi(s,t)\rangle$。従って要求される semi-invariance は

$$\langle a,\Psi(s+x,t)\rangle=e^{x/4}\langle a,\Psi\rangle,$$

$$\langle a,(1-e^{\pm\sqrt{-1}xte^{-s/2}})\Psi(s,t)\rangle=0\quad(\forall x\in\mathbb{R}).$$

第2の式より supp a $\subset(\mathbb{R},0)$、更に第1の式を用いて

$$\langle a,\Psi\rangle=c\int_{\mathbb{R}}\overline{\Psi(s,0)}e^{-\frac{s}{4}}ds\quad(c\in\mathbb{C}).$$

つまり Benoist[1] と Penney[9] からわかる如く

$$\dim(\mathcal{H}_{\pi_\pm}^{-\infty})^{H,\chi_f\Delta_{G/H}^{1/2}}=1.$$

次に$l=\alpha P^*+\beta Q^*\in\mathfrak{g}^*(\alpha^2+\beta^2\neq0)$を通る G-orbit に対応する$\pi_{\alpha,\beta}\in\hat{G}$を考えよう。$\mathfrak{h}=\mathbb{R}P+\mathbb{R}Q+\mathbb{R}E\in I(l,\mathfrak{g})$を用いて $\pi_{\alpha,\beta}$ を実現し、$\phi\in\mathcal{H}_{\pi_{\alpha,\beta}}^{\infty}$ に対し $\Phi(s)=\phi(\exp sT)$ $(s\in\mathbb{R})$ とおく。$a\in(\mathcal{H}_{\pi_{\alpha,\beta}}^{\infty})^{H,\chi_f\Delta_{G/H}^{1/2}}$ として $h=\exp tT$ の時 $\langle\pi(h)a,\Phi\rangle=\langle a,\Phi(s+t)\rangle$、$h=\exp tQ$ の時 $\langle\pi(h)a,\Phi\rangle=\langle a,\phi(\exp tQ\exp sT)\rangle=\langle a,\phi(\exp sT\exp te^{-\frac{s}{2}}Q)\rangle=\langle a,e^{-\sqrt{-1}\beta te^{-s/2}}\Phi(s)\rangle$ 故、要求される semi-invariance は

$$\langle a,\Phi(s+t)\rangle=e^{\frac{s}{4}t}\langle a,\Phi\rangle,$$

$$\langle a,(1-e^{-\sqrt{-1}\beta te^{-s/2}})\Phi(s)\rangle=0\quad(\forall t\in\mathbb{R}).$$

第2式より $\beta \neq 0 \Rightarrow a=0$,i.e. $(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_{\alpha,\beta}})^{H,\chi_f\Delta_{G/H}^{1/2}}=\{0\}$. $\beta=0$ の時、第1式より

$$\langle a,\Phi\rangle=c\int_{\mathbb{R}}\overline{\Phi(s)e^{-\frac{3}{4}s}}\,ds \quad (c\in\mathbb{C})$$

となり、実際この a が $(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_{\alpha,0}})^{H,\chi_f\Delta_{G/H}^{1/2}}$ の non-zero element (for $c\neq 0$) を与える事は例1と同様にしてわかる。つまり

$$\dim(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_{\alpha,0}})^{H,\chi_f\Delta_{G/H}^{1/2}}=1$$

となり、定理1の状況において、即ち exponential group の real polarization からの mononial表現を考える時、exceptionalな表現 $\pi\in\hat{G}$ に関しては、この単項表現の分解におけるその multiplicity に一致しない $\dim(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi})^{H,\chi_f\Delta_{G/H}^{1/2}}$ を持つ事がある。

最後に$l=\alpha T^*\in\mathfrak{g}^*$に対応する G の character についてはどうであろうか。この character を c_α で表わすと $\Delta_{G/H}\equiv 1$ より $(\mathcal{H}^{-\infty}_{c_\alpha})^{H,\chi_f\Delta_{G/H}^{1/2}}=\{0\}$.

以上よりこの例に関しては少なくとも次は成立している：

$$\Omega(\pi)\cap(f+\mathfrak{h}^{\perp})=\phi \text{ なる } \pi\in G^{\wedge} \text{ に対し } (\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi})^{H,\chi_f\Delta_{G/H}^{1/2}}=\{0\}.$$

例4(cf.[2]). Bernat et al.[2]における一例を follow する事から始めよう。$\mathbb{R}\ni\alpha\neq 0$として$G=G_3(\alpha)=\exp\mathfrak{g}_3(\alpha)$、$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_3(\alpha)=\mathbb{R}h+\mathbb{R}a+\mathbb{R}a'$;$[h,a]=a-\alpha a'$、$[h,a']=\alpha a+a'$、$[a,a']=0$ とする。$\forall f\in\mathfrak{g}^*$ において $\mathfrak{h}=\mathbb{R}h\in S(f,\mathfrak{g})$をとり単項表現 $\tau=\mathrm{ind}_H^G\chi_f$ を分解しよう。

$\mathfrak{a}=\mathbb{R}a+\mathbb{R}a'$とおき bijection $\xi a+\eta a'\to\xi+\sqrt{-1}\eta$により $\mathfrak{a}$ を$\mathbb{C}$と同一視すると $[h,z]=(1-\sqrt{-1}\alpha)z$ for $\forall z\in\mathbb{C}$.群Gは $H=\exp\mathbb{R}h$ と $A=\exp\mathbb{C}$との半直積で $\exp\xi h\exp z=\exp(e^{\xi(1-\sqrt{-1}\alpha)}z)\exp\xi h$ for $\xi\in\mathbb{R}$、$z\in\mathbb{C}$。$\lambda=f(h)$とおく。$\Delta_{G/H}(\exp\xi h)=e^{2\xi}$ 、$\chi_f(\exp\xi h)=e^{\sqrt{-1}\xi\lambda}$

故 $\mathcal{H}_\tau$ は関数 $\varphi:G\to\mathbb{C}$ で

$$\varphi(\hat{g}\exp\xi h)=e^{\xi(1-\sqrt{-1}\lambda)}\varphi(\hat{g})\quad\text{for}\quad(\xi,\hat{g})\in\mathbb{R}\times G$$

をみたすものからなる。map $\varphi\mapsto(\tilde{\varphi}:z\to\varphi(\exp z))$ により $\mathcal{H}_\tau$ を $L^2(\mathbb{C})=L^2(\mathbb{R}^2)$ と同一視する。$\xi_\circ\in\mathbb{R}$, $z_\circ, z\in\mathbb{C}, \varphi\in\mathcal{H}_\tau$ として

$$[\tau(\exp\xi_\circ h\exp z_\circ)\tilde{\varphi}][z]=\varphi(\exp(-z_\circ)\exp-\xi_\circ h\exp z)$$

$$=\varphi(\exp(ze^{-\xi_\circ(1-\sqrt{-1}\alpha)}-z_\circ)\exp(-\xi_\circ h))=e^{\xi_\circ(\sqrt{-1}\lambda-1)}(ze^{-\xi_\circ(1-\sqrt{-1}\alpha)}-z_\circ).$$

ここで $\mathfrak{F}$ を $L^2(\mathbb{C})$ の Fourier 変換とし $\tau_1=\mathfrak{F}\cdot\tau\cdot\mathfrak{F}^{-1}$ とおき、$(\,|\,)$ を $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$ の内積、dzを$\mathbb{R}^2$ の Lebesgue measure とする。この時 $\hat{g}=\exp\xi_\circ h\exp z_\circ\in G$、$\psi\in\mathcal{K}(\mathbb{C})$、$v\in\mathbb{C}$として

$$2\pi[\mathfrak{F}(\tau(\hat{g})\psi)](v)=\int_{\mathbb{C}}(\tau(\hat{g})\psi)(z)e^{\sqrt{-1}(v|z)}\,dz$$

$$=\int_{\mathbb{C}}e^{\xi_\circ(\sqrt{-1}\lambda-1)}\psi(ze^{-\xi_\circ(1-\sqrt{-1}\alpha)}-z_\circ)e^{\sqrt{-1}(v|z)}\,dz$$

$$=\int_{\mathbb{C}}e^{\xi_\circ(\sqrt{-1}\lambda+1)}\psi(z')e^{\sqrt{-1}(v|e^{\xi_\circ(1-\sqrt{-1}\alpha)}(z_\circ+z'))}\,dz'$$

$$=2\pi e^{\xi_\circ(\sqrt{-1}\lambda+1)+\sqrt{-1}(v|e^{\xi_\circ(1-\sqrt{-1}\alpha)}z_\circ)}(\mathfrak{F}\psi)(e^{\xi_\circ(1+\sqrt{-1}\alpha)}v).$$

さて a,a' の dual basis を a^*,a'^* で表し $\mathfrak{a}$ 同様 $\mathfrak{a}^*$ を bijection $\mathfrak{a}^*\ni\xi a^*+\eta a'^*\to\xi+\sqrt{-1}\eta\in\mathbb{C}$ により $\mathbb{C}$ と同一視する。$\exp th.(\xi a^*+\eta a'^*)=\xi' a^*+\eta' a'^*$ with $\xi'=e^{-t}(\xi\cos\alpha t+\eta\sin\alpha t)$、$\eta'=e^{-t}(\xi\sin-\alpha t+\eta\cos\alpha t)$ 故 $\xi=\cos\theta$、$\eta=\sin\theta$ とおくと $\xi'=e^{-t}\cos(\theta-\alpha t)$、$\eta'=e^{-t}\sin(\theta-\alpha t)$ となり $e^{\sqrt{-1}\theta}$ を通る coadjoint orbit は $e^{-t}(\cos(\theta-\alpha t)+\ \sin(\theta-\alpha t))=e^{-t+\sqrt{-1}(\theta-\alpha t)}$ 、かつ変数変換 $(\xi',\eta')\to(t,\theta)$ に関しては

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi'}{\partial t} & \frac{\partial \xi'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} & \frac{\partial \eta'}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| = e^{-2t} .$$

以前同様 $\hat{g} = \exp \xi_\circ h \exp z_\circ \in G$ に対し

$$(\tau_1(\hat{g})\varphi)(e^{-t+\sqrt{-1}(\theta-\alpha t)}) = e^{\xi_\circ(\sqrt{-1}\lambda+1)+\sqrt{-1}(e^{-t+\sqrt{-1}(\theta-\alpha t)}|e^{\xi_\circ(1-\sqrt{-1}\alpha)}z_\circ)}$$

$$\times \varphi(e^{\xi_\circ(1+\sqrt{-1}\alpha)}e^{-t+\sqrt{-1}(\theta-\alpha t)})$$

$$= e^{\xi_\circ(\sqrt{-1}\lambda+1)+\sqrt{-1}(e^{-t+\sqrt{-1}(\theta-\alpha t)}|e^{\xi_\circ(1-\sqrt{-1}\alpha)}z_\circ)}$$

$$\times \varphi(e^{(-t+\xi_\circ)(1+\sqrt{-1}\alpha)+\sqrt{-1}\theta}).$$

従って各 coadjoint orbit 上の L^2-function は τ_1 で不変。そこでこの表現が $\cos\theta + i\sin\theta \in \mathfrak{a}^*$ から出発して構成される $\pi_\theta \in \hat{G}$ に他ならない事をみよう。

φ を π_θ の表現空間の元、$\hat{g}$ は上の通りとすると

$$(\pi_\theta(\hat{g})\varphi)(\exp xh) = \varphi(\exp -z_\circ \exp -\xi_\circ h \exp xh) = \varphi(\exp -z_\circ \exp(x-\xi_\circ)h)$$

$$= \varphi(\exp(x-\xi_\circ)h \exp -e^{(\xi_\circ - x)(1-\sqrt{-1}\alpha)}z_\circ)$$

$$= e^{\sqrt{-1}(e^{\sqrt{-1}\theta}|e^{(\xi_\circ-x)(1-\sqrt{-1}\alpha)}z_\circ)}\varphi(\exp(x-\xi_\circ)h).$$

即ち π_θ は $L^2(\mathbb{R})$ に

$$(\pi_\theta(\hat{g})\varphi)(x) = e^{\sqrt{-1}(e^{\sqrt{-1}\theta}|e^{(\xi_\circ-x)(1-\sqrt{-1}\alpha)}z_\circ)}\varphi(x-\xi_\circ)$$

で実現される。ここで $\Phi(x) = e^{(1+\sqrt{-1}\lambda)x}\varphi(x)$ とおき map $\varphi \leftrightarrow \Phi$ により π_θ を

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2x} \, |\, \Phi(x) \,|^2 dx < +\infty$$

なる Φの space 上に実現したものを$\hat{\pi}_\theta$ とすると、

$$(\hat{\pi}_\theta(\hat{g})\Phi)(x) = e^{(1+\sqrt{-1}\lambda)x}\pi_\theta(\hat{g})(e^{-(1+\sqrt{-1}\lambda)x}\Phi(x))$$

$$= e^{(1+\sqrt{-1}\lambda)x} e^{\sqrt{-1}(e^{\sqrt{-1}\theta} | e^{(\xi_0 - x)(1-\sqrt{-1}\alpha)} z_0)} e^{-(1+\sqrt{-1}\lambda)(x-\xi_0)} \Phi(x-\xi_0)$$

$$= e^{\xi_0(1+\sqrt{-1}\lambda)+\sqrt{-1}(e^{\sqrt{-1}\theta} | e^{(\xi_0-x)(1-\sqrt{-1}\alpha)} z_0)} \Phi(x-\xi_0)$$

而るに上記τ_1の $e^{\sqrt{-1}\theta}$ を通る coadjoint orbit 上への制限に関し$\Psi(t) = \varphi(e^{-t(1+\sqrt{-1}\alpha)+\sqrt{-1}\theta})$ $(t \in \mathbb{R})$ とおくとτ_1は

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2t} \, |\, \Psi(t) \,|^2 dt < +\infty$$

なるΨの space 上に実現され、今この表現を$\hat{\tau}$と記すと明らかに

$$(\hat{\tau}(\hat{g})\Psi)(t) = e^{\xi_0(1+\sqrt{-1}\lambda)+\sqrt{-1}(e^{\sqrt{-1}\theta} | e^{(\xi_0-t)(1-\sqrt{-1}\alpha)} z_0)} \Psi(t-\xi_0).$$

以上より $\hat{\pi}_\theta \simeq \hat{\tau}$、つまり

$$\tau \simeq \int_{[0,2\pi)}^{\oplus} \pi_\theta \, d\theta$$

となり、τ は multiplicity free かつその分解における measure は $f+\mathfrak{h}^\perp$ における Lebesgue measure の image measure である。

この note を終えるにあたり１つだけ定理を記しておこう。それは巾零群に対する Howe の結果 (cf.[7]) の拡張である。

定理3.$G = \exp \mathfrak{g}$:exponential group, $f \in \mathfrak{g}^*$、$\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$、$\pi \in \hat{G}$ とする。この時

$$\dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f \Delta_{G/H}^{1/2}} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \Omega(\pi)=G.f、\\ 0 & \text{if} \quad \Omega(\pi)\neq G.f. \end{cases}$$

References

[1] Y.Benoist, Espaces symétriques exponentiels, These 3ᵉ cycle ,Univ. Paris VII,1983.

[2] P.Bernat et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris 1972.

[3] L.Corwin, F.P.Greenleaf and G.Grélaud, Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups, to appear.

[4] H.Fujiwara, Certains opérateurs d'entrelacement pour des groupes de Lie résolubles exponentiels et leurs applications, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. A, 36(1982), 13-72.

[5] H.Fujiwara, Polarisations réelles et représentations associées d'un groupe de Lie résoluble, J. Func. Anal., 60(1985), 102-125.

[6] H.Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents, to appear.

[7] R.Howe, On a connection between nilpotent groups and oscillatory integrals associeted to singularitiess, Pacific J. Math., 73(1977), 329-364.

[8] A.A.Kirillov, Unitary representations of nilpotent Lie groups, Usp. Mat. Nauk 17(1962), 57-110.

[9] R. Penney, Abstract Plencherel theorems and a Frobenius re-

ciprocity theorem, J. Func. Anal., 18(1975), 177-190.

[10] M.Vergne, Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, Ann. scient. Éc. Norm . Sup., 3(1970), 353-384.